Plan

MICHAŁ PIRÓG
INSTYTUT FIZYKI IM. MARIANA SMOLUCHOWSKIEGO UJ

RELATYWISTYCZNE ANTYWLECZENIE W DYSKACH AKRECYJNYCH

SZLIF

08.04.2016

1. Czym jest rotacja keplerowska?

2. Model newtonowski.

3. Model post-newtonowski.

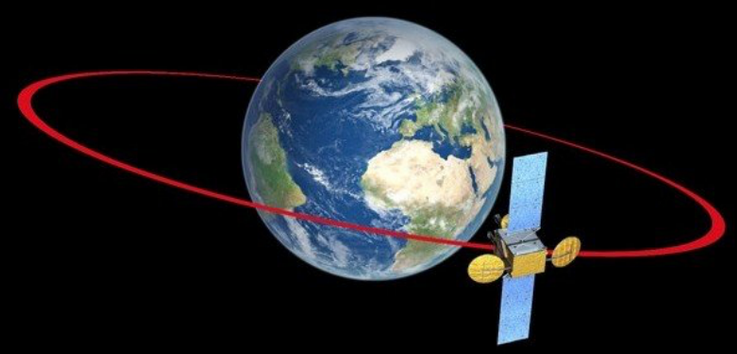
4. Opis w ramach Ogólnej Teorii Względności.

5. Nowy efekt słabego pola grawitacyjnego — relatywistyczne antywleczenie.

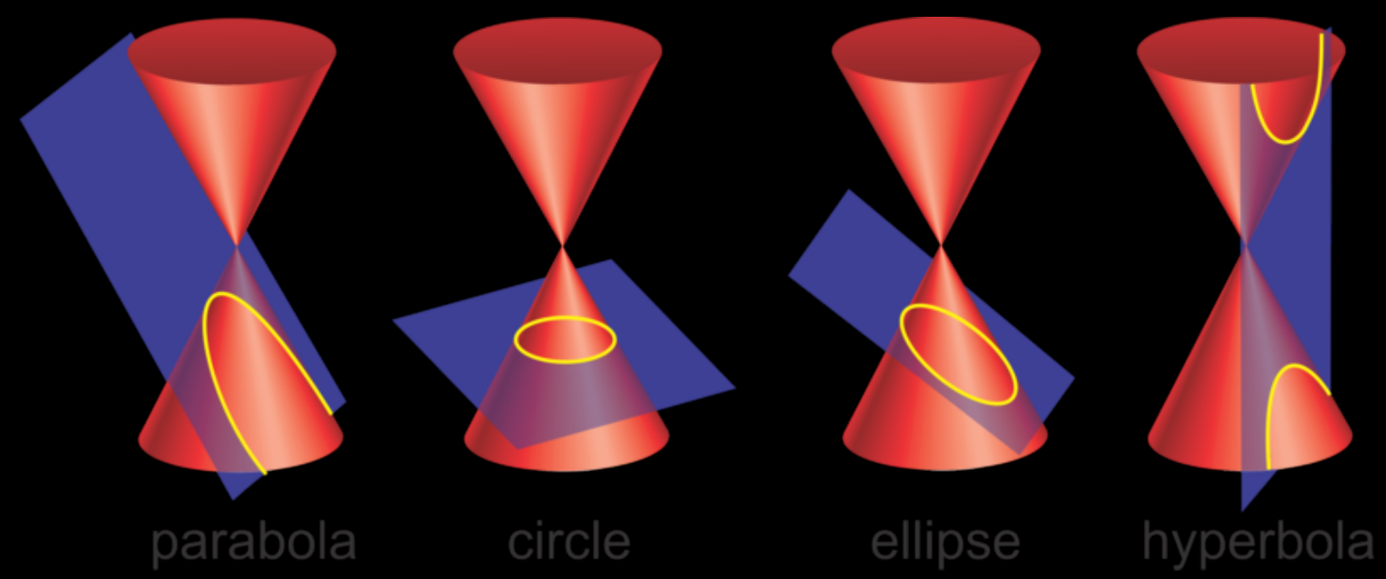
1. Czym jest rotacja keplerowska?

Prawa Keplera

Ruch po okręgu



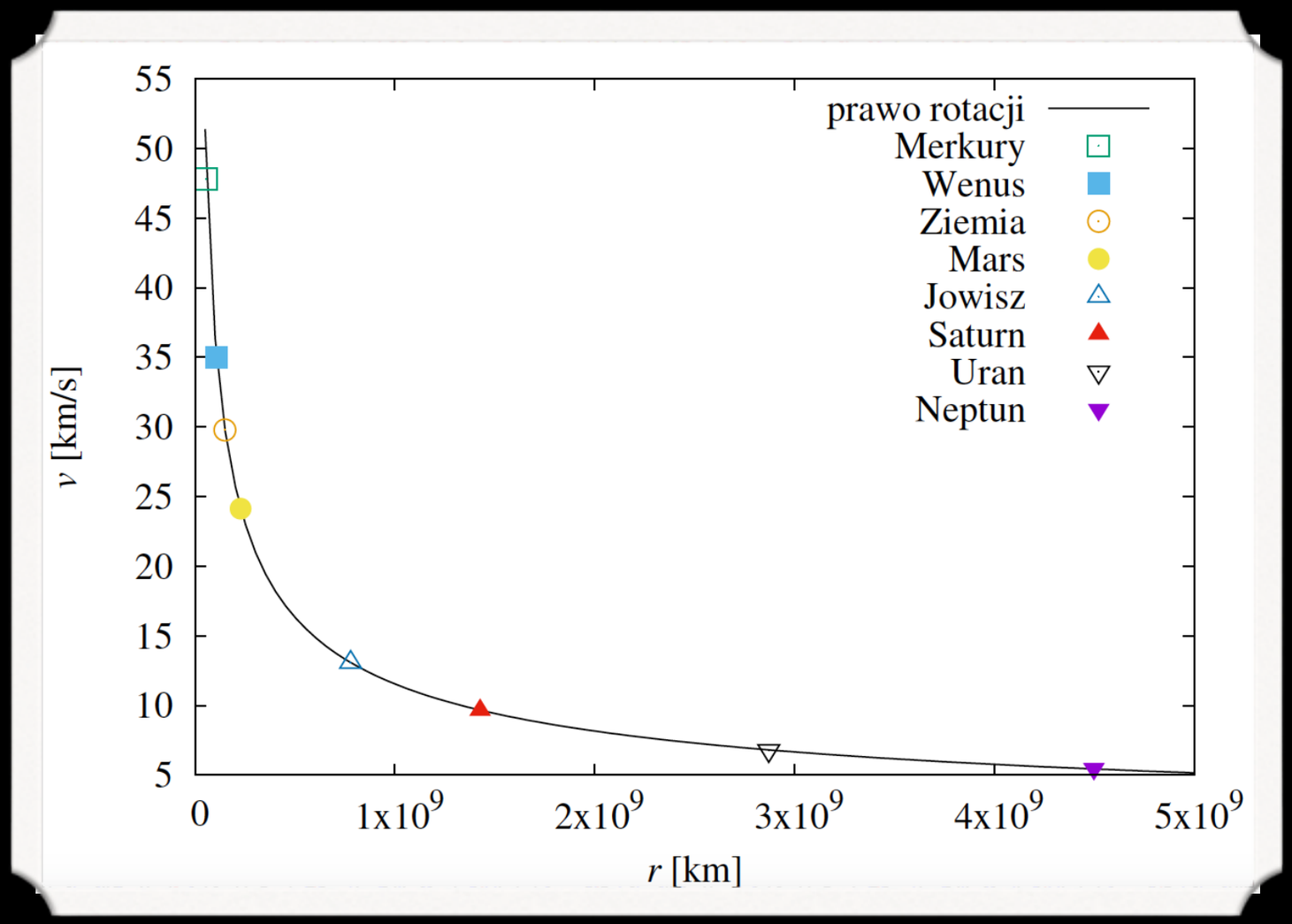
Ruch po krzywych stożkowych



Ruch keplerowski - ruch w sferycznie symetrycznym potencjale typu 1/*r*.

Prawa Keplera

$$v = \sqrt{GM_{\odot}/r}$$



Układ wielu ciał

$$U(\mathbf{x}) = \Sigma_{i=0}^{n} U_i(\mathbf{x}) = -\Sigma_{i=0}^{n} \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}$$

$$U(\mathbf{x}) = U_\mathrm{c}(\mathbf{x}) + \Sigma_{i=1}^{n} U_i(\mathbf{x}) = -\frac{GM_\mathrm{c}}{|\mathbf{x}_\mathrm{c} - \mathbf{x}|} - \Sigma_{i=1}^{n} \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}$$

$$U(\mathbf{x}) = U_\mathrm{c}(\mathbf{x}) = -\frac{GM_\mathrm{c}}{|\mathbf{x}_\mathrm{c} - \mathbf{x}|}$$

$$v = \sqrt{GM_\odot / r}$$

Układ wielu ciał

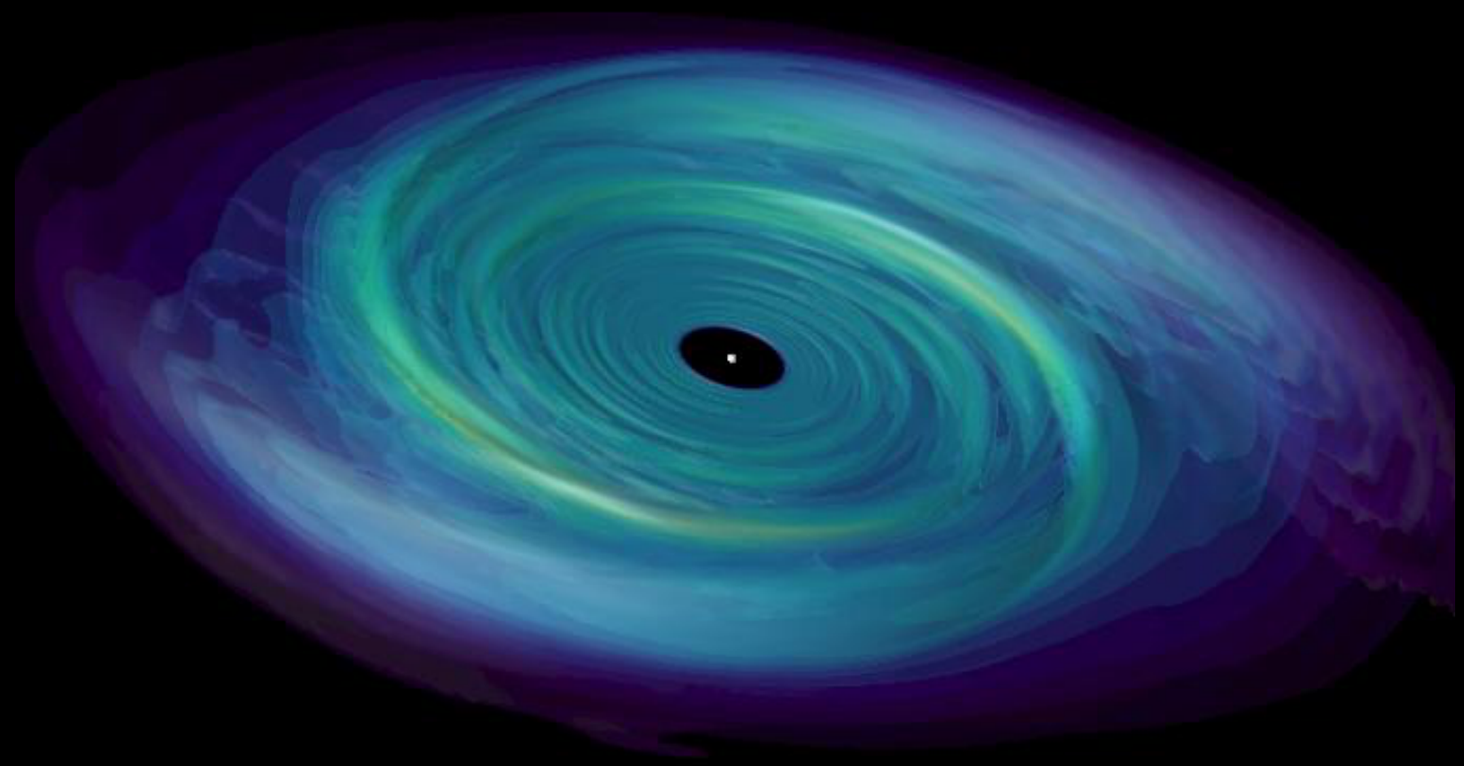
$$U(\mathbf{x}) = \Sigma_{i=0}^{n} U_i(\mathbf{x}) = -\Sigma_{i=0}^{n} \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}$$

$$U(\mathbf{x}) = U_\mathrm{c}(\mathbf{x}) + \cancel{\Sigma_{i=1}^{n} U_i(\mathbf{x})} = -\frac{GM_\mathrm{c}}{|\mathbf{x}_\mathrm{c} - \mathbf{x}|} - \cancel{\Sigma_{i=1}^{n} \frac{Gm_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}}$$

$$U(\mathbf{x}) = U_\mathrm{c}(\mathbf{x}) = -\frac{GM_\mathrm{c}}{|\mathbf{x}_\mathrm{c} - \mathbf{x}|}$$

$$v = \sqrt{GM_\odot / r}$$

Dysk



Dysk - struktura o geometrii posiadającej symetrie: a) osiową, b) odbiciową (względem równika).

Definicje

krzywa rotacji - zależność prędkości (liniowej/kątowej) od odległości od osi obrotu

$$v = v(r) \qquad \Omega = \Omega(r)$$

<u>*keplerowska*</u> *krzywa rotacji* - zależność prędkości (liniowej/kątowej) od odległości od osi obrotu <u>postaci:</u>

$$v(r) \propto r^{-\frac{1}{2}} \qquad \Omega(r) \propto r^{-\frac{3}{2}}$$

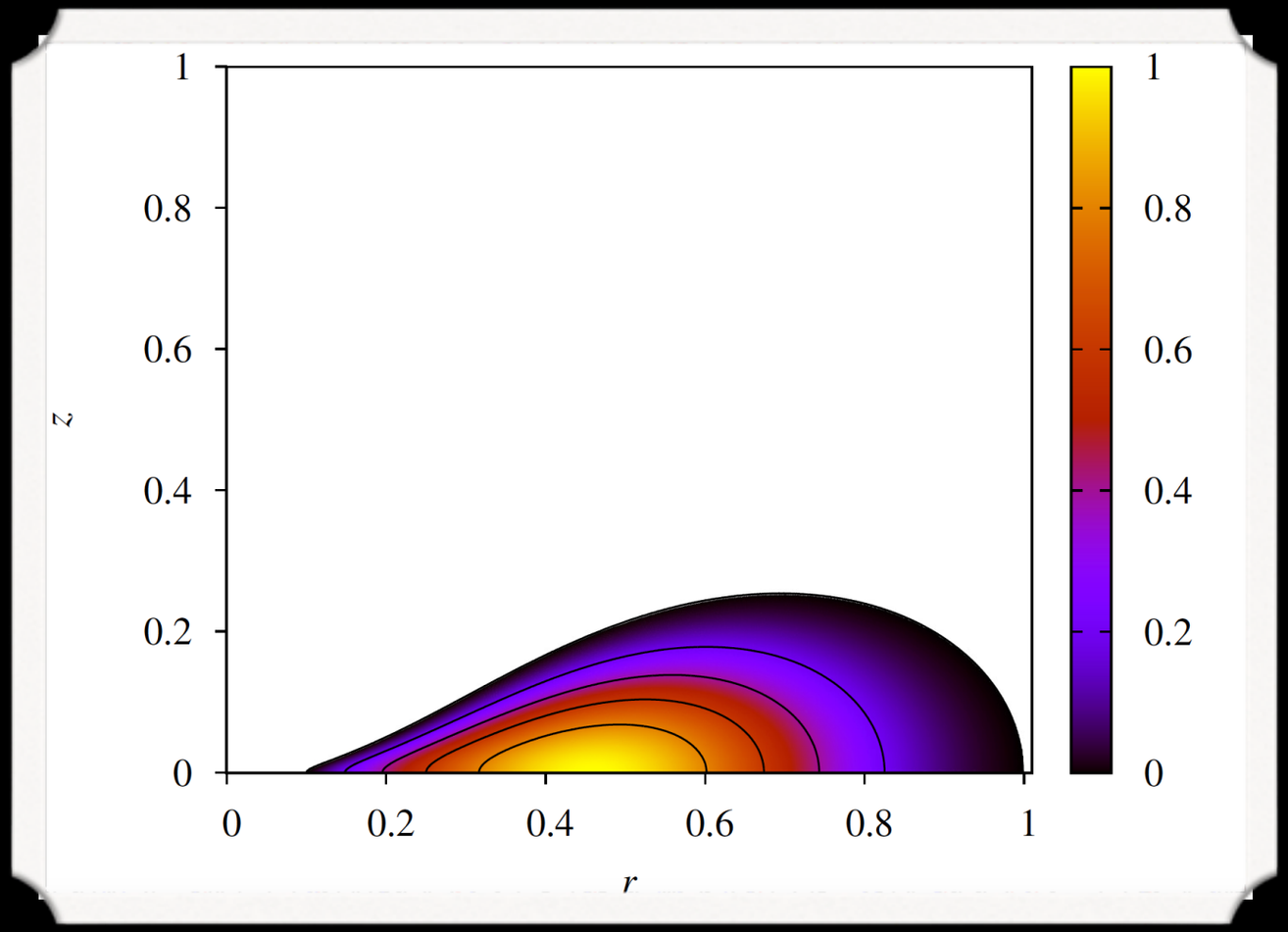
<u>*ściśle keplerowska*</u> *krzywa rotacji* - zależność prędkości (liniowej/kątowej) od odległości od osi obrotu <u>postaci:</u>

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{c}}}{r}} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{c}}}{r^3}}$$

2. Model newtonowski

Założenia modelowe

- Symetria obrotowa oraz odbiciowa względem równika
- Punktowa masa centralna w punkcie (0,0)
- Początek i koniec dysku na płaszczyźnie równikowej (promień wewnętrzny i promień zewnętrzny)
- Politropowe równanie stanu
- Rotacja keplerowska



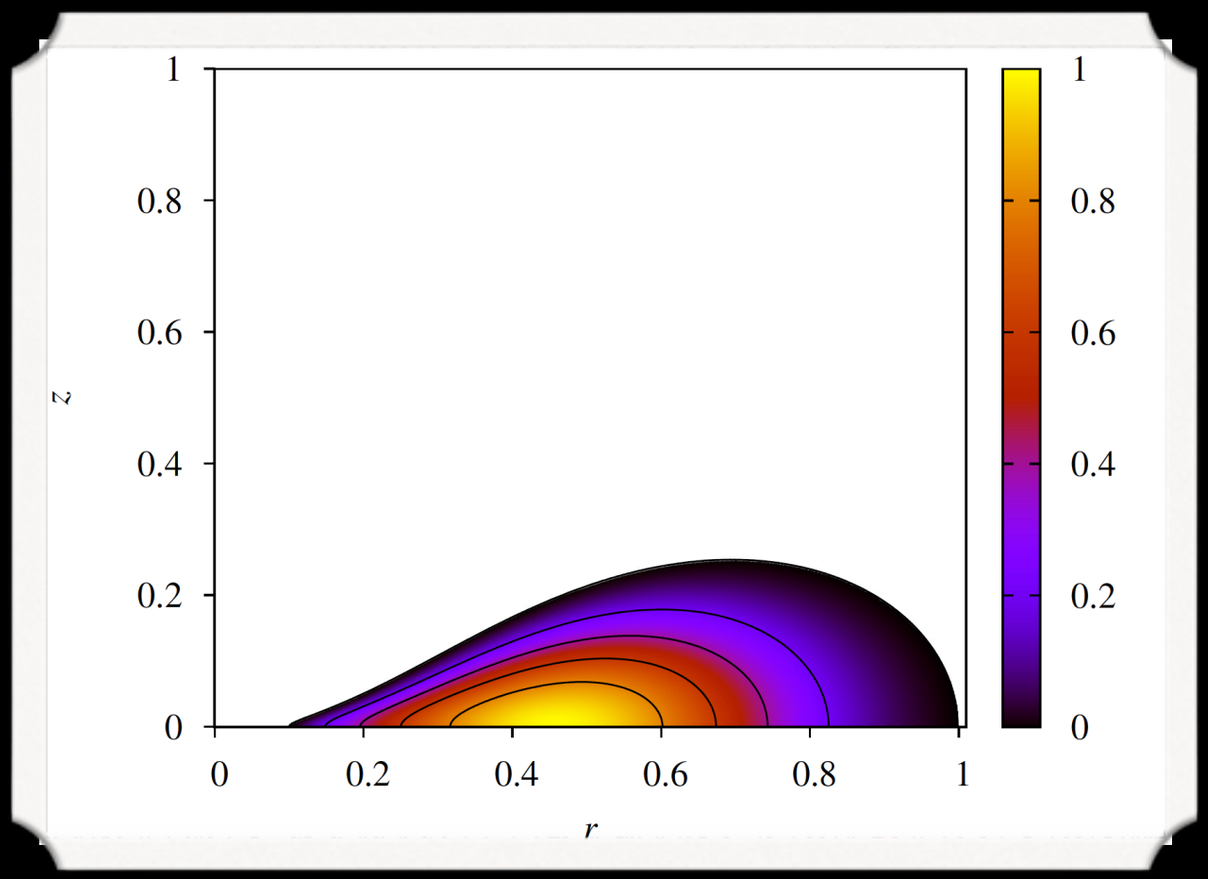
$$U(\mathbf{x}) = U_{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) + U_{\mathrm{d}}(\mathbf{x})$$

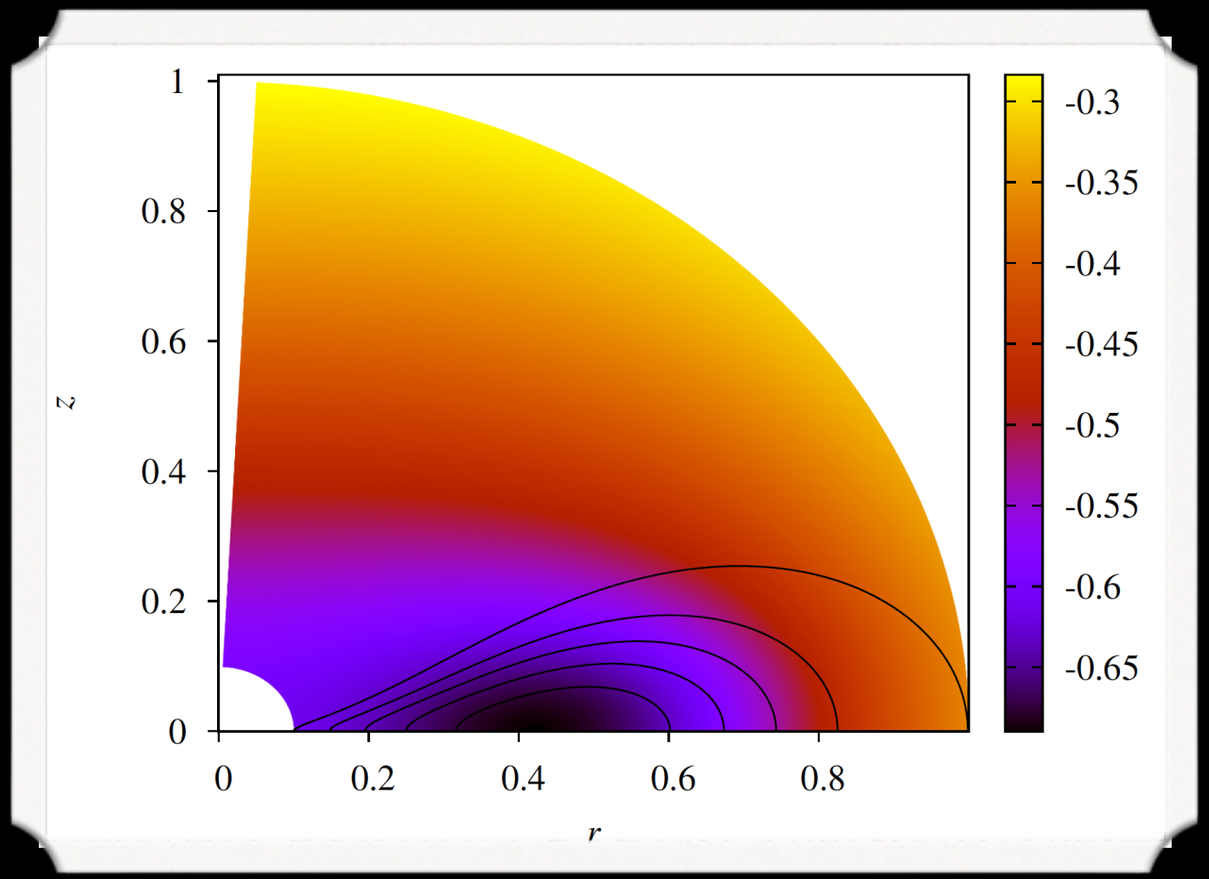
$$\Delta U_{\mathrm{d}}(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x})$$

$$h + U + U_{\mathrm{c}} = C$$

$$h(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})$$

Niesferyczny potencjał





Stała w prawie rotacji

$$\Omega^2 = \frac{GM_c}{r^3}$$

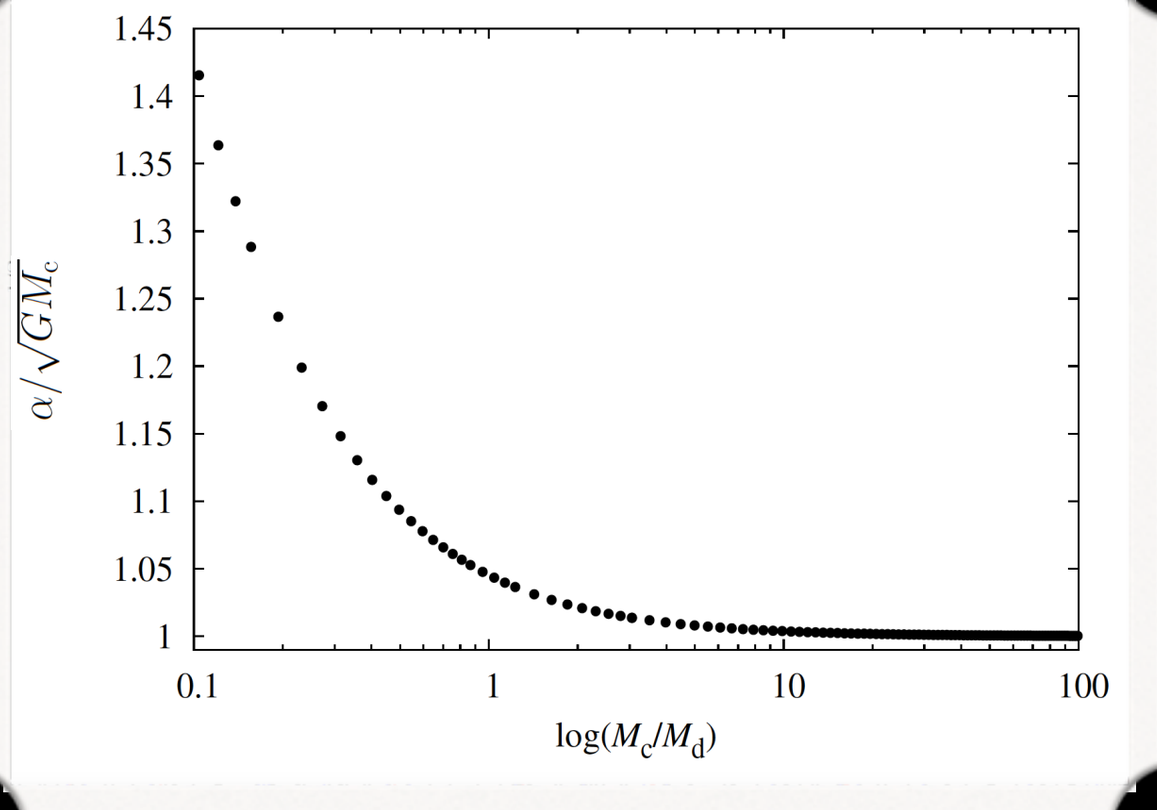
szczególny przypadek dla sferycznie symetrycznego potencjału masy punktowej

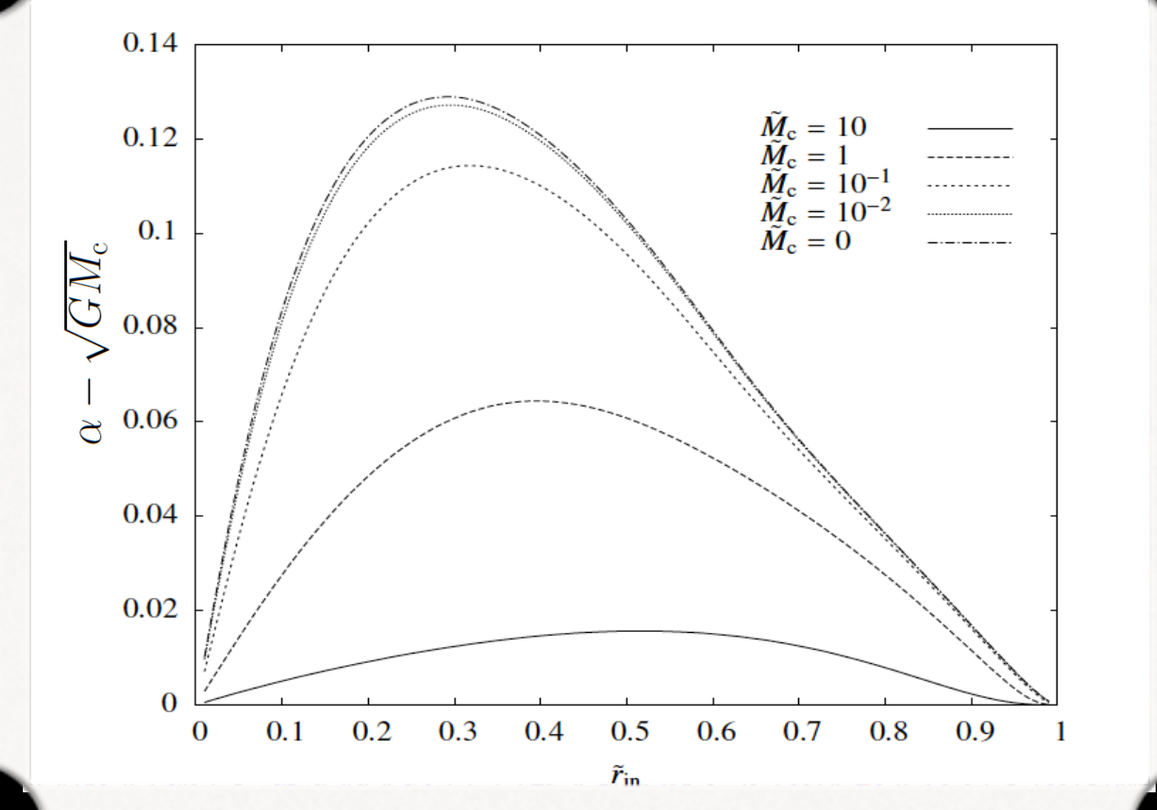
$$\Omega^2 = \frac{\alpha^2}{r^3}$$

ogólna relacja dla rotacji keplerowskiej

Stała w prawie rotacji

$$\Omega = \frac{\sqrt{GM_c} + \delta(r_{in}, r_{out}, \rho)}{r^{3/2}}$$





Stała w prawie rotacji

$$\Omega = \frac{\sqrt{GM_{\mathrm{c}}} + \delta(r_{\mathrm{in}}, r_{\mathrm{out}}, \rho)}{r^{3/2}}$$

1. Szacowanie masy w oparciu o keplerowskie prawo rotacji jest niepewne

2. Rotacja może być keplerowska nawet w przypadku ciężkiego/grubego dysku

3. Prędkość rotacji jest stała dla ustalonego promienia cylindrycznego

3. Model post-newtonowski

Założenia modelowe

- Element liniowy we współrzędnych cylindrycznych:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(-1 - 2\frac{U(r,z)}{c^2} - 2\frac{(U(r,z))^2}{c^4}\right)(\mathrm{d}t)^2 + \\ -2\frac{A_\phi(r,z)}{c^3}\mathrm{d}x^\phi \mathrm{d}t + \left(1 - 2\frac{U(r,z)}{c^2}\right)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

- Sygnatura metryki: $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$

- Zmienne, które tego wymagają rozdzielone są na część newtonowską oraz post-newtonowską według reguły: $\xi = \xi_0 + \frac{\xi_1}{c^2}$

Podstawowe równania

- Do post-newtonowskiego opisu potrzeba pól: $A_\phi(\vec{x}),\ \rho_0(\vec{x}),\ \rho_1(\vec{x}),\ U_0(\vec{x}),\ U_1(\vec{x})$

- Równania

$$\Delta A_i = -\frac{1}{c^2} 16\pi G T^{0i}$$

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$$

$$\Delta U = -\frac{1}{c^2} 4\pi G \sqrt{g}(T^i_i - T^0_0)$$

gdzie:

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\mathrm{BH}} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{D}}$$

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{D}} = \rho(c^2 + h)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{BH}} = \frac{M_{\mathrm{c}} c^2}{\sqrt{g}} \frac{u^\mu_{\mathrm{BH}} u^\nu_{\mathrm{BH}}}{u^0_{\mathrm{BH}}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\mathrm{BH}}(t))$$

Podstawowe równania

- Do post-newtonowskiego opisu potrzeba pól: $A_\phi(\vec{x}),\ \rho_0(\vec{x}),\ \rho_1(\vec{x}),\ U_0(\vec{x}),\ U_1(\vec{x})$

- Równania

$$\Delta A_i = -\frac{1}{c^2} 16\pi G T^{0i}$$

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$$

$$h_0 = \int \mathrm{d}r \Omega_0^2 r + U_0 + C_0$$

$$h_1 = U_1 - \Omega_0 A_\phi + 2h_0 r^2 \Omega_0^2 - \int \mathrm{d}r (v_0^\phi)^2 r^3 - \frac{3}{2} h_0 + 4h_0 U_0 - 2U_0^2$$

$$\Delta U = -\frac{1}{c^2} 4\pi G \sqrt{g} (T_i^i - T_0^0)$$

$$U_0 = -\frac{GM_c}{|\vec{x}|} + U_{0,\mathrm{g}}$$

$$U_1 = -\frac{U_0 M_c}{|\vec{x}|} + U_{1,\mathrm{g}} + h) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

gdzie:

$$\Delta U_{0,\mathrm{g}} = 4\pi G \rho_0$$

$$\Delta U_{1,\mathrm{g}} = -4\pi G (\rho_1 + 2p_0 + \rho_0 (h_0 + 2U_0 + 2\vec{v_0}^2))$$

Układ Poisson-Euler, metoda SCF

$$U_0 = -\frac{GM_c}{|\vec{x}|} + U_{0,\mathrm{g}}$$

$$h_0 = \int \mathrm{d}r \Omega_0^2 r + U_0 + C_0$$

$$\rho_0(\vec{x}),\ U_0(\vec{x})$$

$$A_\phi(\vec{x})$$

$$\Delta A_i = -\frac{1}{c^2} 16\pi G T^{0i}$$

$$U_1 = -\frac{U_0 M_c}{|\vec{x}|} + U_{1,\mathrm{g}}$$

$$\rho_1(\vec{x}),\ U_1(\vec{x})$$

$$h_1 = U_1 - \Omega_0 A_\phi + 2h_0 r^2 \Omega_0^2 - \int \mathrm{d}r (v_0^\phi)^2 r^3 - \frac{3}{2} h_0 + 4h_0 U_0 - 2U_0^2$$

4. Opis w ramach Ogólnej Teorii Względności

Założenia modelowe

- Element liniowy we współrzędnych cylindrycznych:

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\frac{2\nu}{c^2}}(\mathrm{d}x^0)^2 + r^2 e^{\frac{2\beta}{c^2}}\left(\mathrm{d}\phi - \frac{\omega_0}{c^3}(r,z)\,\mathrm{d}x^0\right)^2 + e^{\frac{2\alpha}{c^2}}\left(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

- Sygnatura metryki: $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$
- Współrzędna czasowa: $x^0 = ct$
- Funkcje metryczne: $\alpha(r,z),\ \beta(r,z),\ \nu(r,z),\ \omega(r,z)$

Podstawowe równania

- Równanie Eulera: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$
- Równanie ciągłości: $\nabla_\nu(\rho u^\mu) = 0$
- Równanie Bernoulliego: $\ln\left(1+\frac{h}{c^2}\right) + \frac{\nu}{c^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\int d\Omega j(\Omega) = C_2$
- Warunek całkowalności: $j := j(\Omega)$

Prawo rotacji

$$\frac{\omega^{1-\delta}\Omega^{\delta}}{1-\frac{\kappa}{c^2}\omega^{1-\delta}\Omega^{1+\delta}+\frac{\sigma}{c^2}} = \frac{\mathbf{v}^2}{\left(\Omega-\frac{\omega}{c^2}\right)\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)}$$

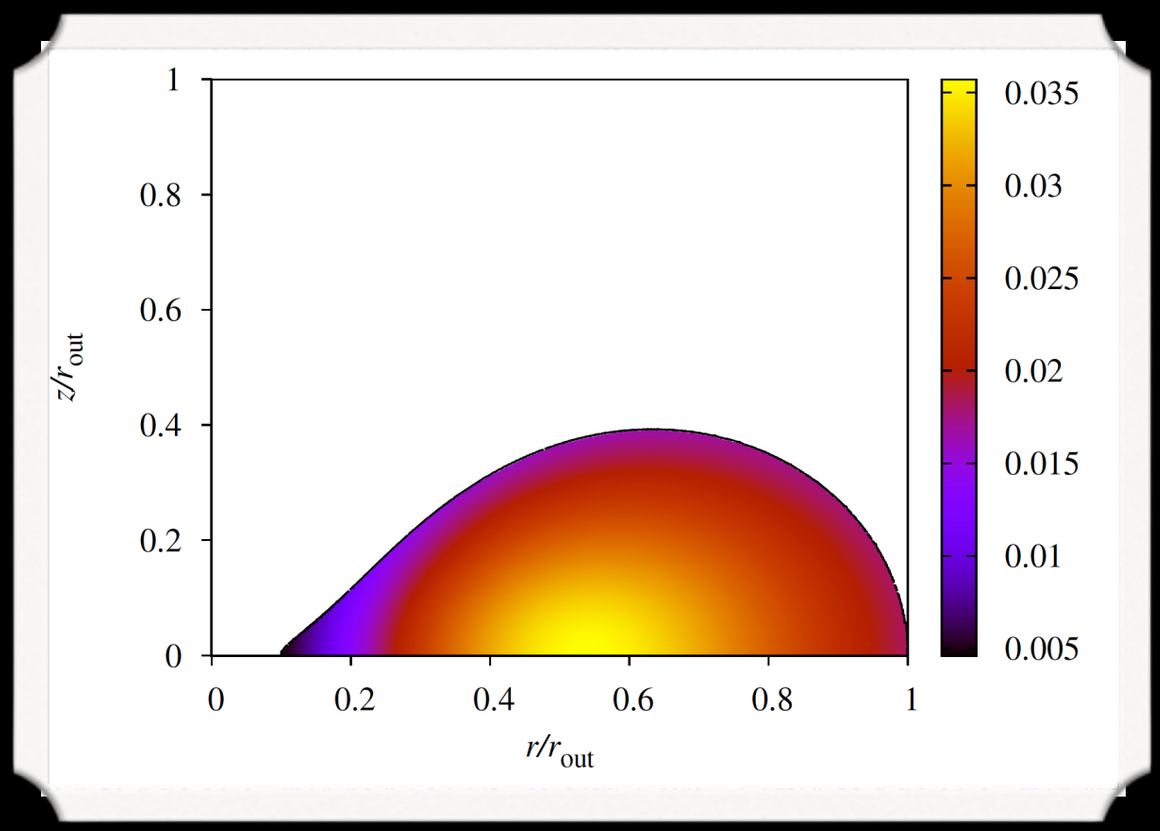
Z tego prawa łatwo odzyskać granicę newtonowską: $\lim_{c\to\infty}\Omega = \Omega_0 = \frac{\omega_0}{r^{2/(1-\delta)}}$. Widać teraz, że równanie to opisuje następujące przypadki szczególne:

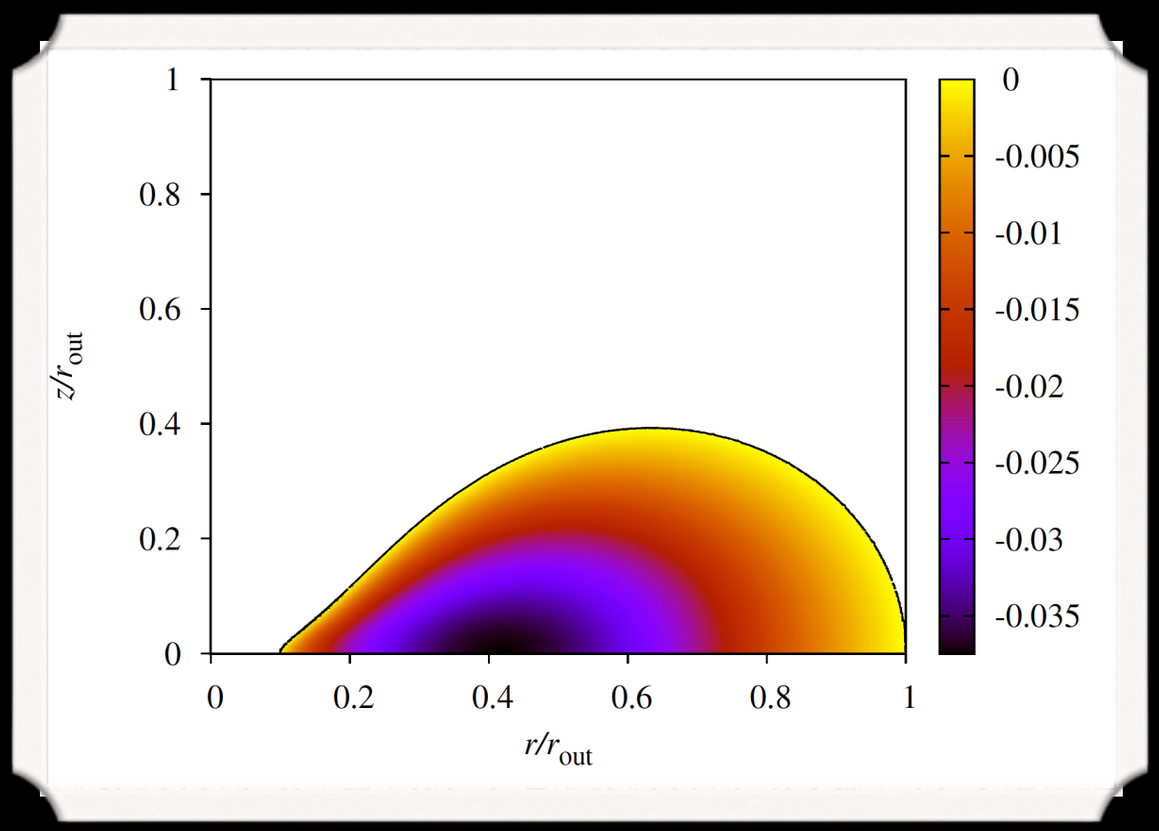
- rotacja keplerowska: $\delta = -\frac{1}{3}$
- rotacja sztywna: $\delta = -\infty$
- rotacja ze stałą prędkością liniową: $\delta = -1$
- rotacja ze stałym momentem pędu na jednostkę masy: $\delta = 0$

5. Nowy efekt słabego pola grawitacyjnego — relatywistyczne antywleczenie

Poprawki 1PN

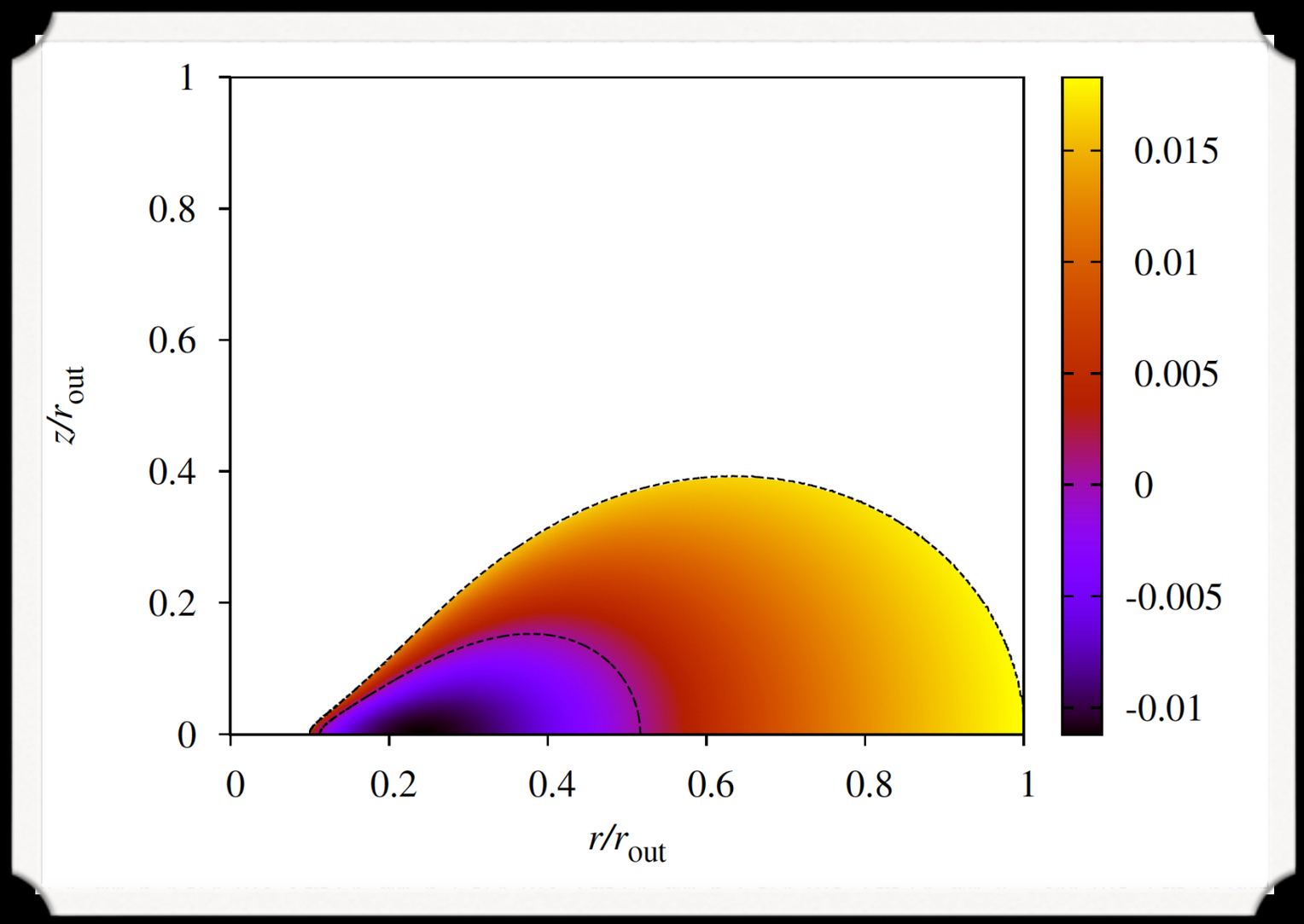
$$\Omega = \frac{\alpha}{r^{-3/2}} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 - \frac{3}{2}\Omega_0(\Omega_0^2 r^2 + U_0)\right)$$





Poprawki 1PN

$$\Omega = \frac{\alpha}{r^{-3/2}} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 - \frac{3}{2}\Omega_0(\Omega_0^2 r^2 + U_0)\right)$$



Podsumowanie

$$\Omega = \frac{\alpha}{r^{-3/2}} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{3A_\phi}{4r^2} - 3\Omega_0 h_0 - \frac{3}{2}\Omega_0(\Omega_0^2 r^2 + U_0)\right)$$

- Sferyczna symetria potencjału grawitacyjnego nie jest warunkiem koniecznym keplerowskiej rotacji
- Uwzględnienie post-newtonowskich poprawek wprowadza zależność od współrzędnej wertykalnej
- Post-newtonowska poprawka może być w niektórych przypadkach znacząca — do kilku procent.
- Dynamiczne antywleczenie to nowo odkryty efekt słabego pola grawitacyjnego

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ